Solusi Persamaan Laplace pada Koordinat Bola

Syafruddin Side[1], Ahmad Zaki[1], dan Nurhaeda[1, a)]
[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, 90224*
[a)] nhaeda24@gmail.com

Abstrak. *Penelitian ini mengkaji mengenai persamaan Laplace pada koordinat bola dan menerapkan metode pemisahan variabel dalam menentukan solusi persamaan Laplace. persamaan Laplace didefinisikan sebagai operator diferensial* $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ *. Bbentuk umum persamaan Laplace pada dimensi tiga dimana* u *adalah fungsi skalar dengan menggunakan metode pemisahan variable diperoleh persamaan Laplace dimensi tiga pada koordinat. Hasil penelitian ini mendapatkan penyelesaian persamaan Laplace pada koordinat bola dalam bentuk variabel terpisah dengan tidak menggunakan nilai batas.*

Hubungan koordinat kartesian dan koordinat bola pada persamaan Laplace dapat ditentukan dalam persamaan Laplace dan memperoleh solusi dengan menggunakan koordinat bola

Kata Kunci: *Koordinat Bola, Pemisahan Variabel, Persamaan Laplace.*

Abstract, *This study examines Laplace equations on spherical coordinates and applies the method of separating variables in determining Laplace equation solutions. Laplace equation is defined as the differential operator*$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$*. The general form of the Laplace equation in dimension three where u is a scalar function using the method of separation variable obtained by Laplace equation of three dimension at coordinate. The result of this research get solution of Laplace equation on spherical coordinate in the form of separate variable by not using boundary value.*

The relationship of cartesian coordinates and spherical coordinates to Laplace equations can be determined in Laplace's equations and obtain solutions using spherical coordinates

Keywords: *Spherical Coordinat Variabel Separation dan Laplace Equation.*

PENDAHULUAN

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat turunan parsial satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas. Dalam persamaan diferensial parsial tingkat dua dikenal persamaaan Lapalace dengan bentuk umum: $\nabla^2 u = 0$ dengan $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ dan $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ merupakan operasi Laplace dua dan tiga dimensi (Taylor dalam Side, 2014). Persamaan Laplace dimensi tiga terdiri dari tiga variabel bebas x, y dan z untuk menyatakan posisi benda di dalam ruan (R^3) dibutuhkan suatu sistem koordinat. Sistem koordinat adalah suatu cara yang digunakan untuk menentukan letak suatu titik pada bidang(R^2) atau ruang (R^3). Pada bidang (R^2), letak titik pada umumnya dinyatakan dalam koordinat Cartesius dan koordinat kutub. Sedangkan pada ruang (R^3) letak suatu titik pada umumnya dinyatakan dalam koordinat Cartesius, koordinat tabung dan koordinat bola. Koordinat Cartesian tiga dimensi (x, y, z) dapat diubah menjadi koordinat tabung dan koordinat bola. Hubungan dari ketiganya, jika $u(x, y, z)$ adalah titik dalam koordinat Cartesian, maka $u(r, \theta, z)$ adalah titik dalam koordinat tabung dan $u(r, \theta, \phi)$ adalah titik dalam koordinat bola (Purnomo, 2016).

Persamaan Laplace sebelumnya oleh (Faradillah.,2011) pada penelitiannya untuk mencari penyelesaian analitik dengan mengguanakan metode pemisahan variabel *(separation of variables)* untuk memperoleh penyelesaian khusus, penyelesaian umum dan penyelesaian numerik dengan menggunakan metode beda hingga *(finite difference)*. Selain itu, artikel (Aziz & Chandra.,2015) yang berjudul "Fungsi Harmonik dan Penerapan Persamaan Laplace dalam Menyelesaikan Masalah Nilai Batas pada Koordinat Polar" penelitian ini dilakukan dengan cara mengenalkan Metode variabel terpisah adalah suatu teknik mencari solusi dengan menggunakan nilai batas dan mengecek kondisi batas. Kemudian menunjukkan solusi dari permasalahan nilai batas dalam domain yang berbeda, yaitu empat permasalahan di ruang Euclid berdimensi dua dan satu permasalahan dalam ruang Euclid berdimensi tiga.

Oleh karena itu, pada artikel ini dibahas mengenai prosedur matematis persamaan Laplace dimensi tiga pada koordinat bola serta menerapkan metode variabel terpisah dalam menentukan solusi persamaan Laplace pada koordinat bola.

Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang menyangkut satu atau lebih fungsi (variabel tak bebas) beserta turunannya terhadap lebih dari satu variabel bebas (Anggoro dalam Side, 2014).

Bentuk umum persamaan diferensial parsial adalah

$$F\left(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{yy}, \ldots\right) = 0$$

Persamaan diferensial parsial linier adalah suatu bentuk persamaan diferensial parsial yang berderajat satu dalam peubah tak bebasnya dan turunnan parsialnya. Ketika ada sebuah fungsi $w(x, y)$ yang bergantung pada dua variable x dan y dan jika diturunkan terhadap y dan x bernilai konstan.

Adapun bentuk umum persamaan diferensial parsial linier orde-2 diberikan dengan

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

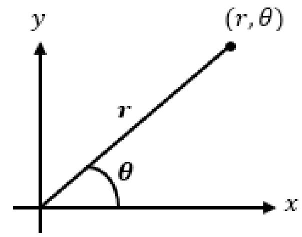
dengan A, B, C, D, E, F dan G adalah fungsi-fungsi bergantung pada x dan y .

Persamaan Laplace

Persamaan *Laplace* merupakan salah satu jenis persamaan diferensial parsial yang banyak digunakan untuk memodelkan permasalahan dalam bidang sains. Persamaan ini merupakan contoh klasik dari persamaan eliptik dan merupakan jenis persamaan diferensial linier orde dua dengan dua peubah. Persamaan *Laplace* yang bentuk umumnya $\Delta v = 0$ sering dijumpai pada teori perpindahan panas, mekanika fluida, elastisitas, elektrostatis dan masalah mekanika dan fisika lainnya Salah satu permasalahan dalam persamaan *Laplace* yang akan dibahas pada penelitian ini yaitu masalah distribusi suhu dalam keadaan tunak pada sebuah logam dalam dimensi dua berbentuk plat.

Masalah penyelesaian persamaan $\nabla^2 v = 0$ di dalam daerah R sering disebut *Dirichlet problem,* dengan v sebagai fungsi yang di ketahui pada batas R. Persamaan Laplace dapat dituliskan dalam beberapa bentuk bergantung pada sistem koordinat yang digunakan yaitu:

1. Persamaan Laplace dalam dua dimensi
   $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$ pada sistem koordinat kartesius
   $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}=0$ pada sistem koordinat polar
   dengan, $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ dan $r=\sqrt{x^2+y^2}$
2. Persamaan Laplace dalam tiga dimensi



GAMBAR 1. Koordinat Kartesius

$$\nabla^2 v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0 \text{ pada koordinat kartesius} \quad (1)$$

Metode Pemisahan Variabel

Metode pemisahan variabel adalah teknik klasik yang evektif dalam menyelesaikan beberapa tipe persamaan diferensial parsial. Pada Metode Variabel Terpisah, solusi $u(x,y)$ diasumsikan mempunyai bentuk

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

Definisi 1. (Kusumah, 1989):

Sebuah persmaan diferensial yang berbentuk $F(x)G(y)dx+f(x)g(y)=0$
Disebut persamaan diferensial dengan variabel terpisah.

Persamaan Diferensial Linear Cauchy

Bentuk persamaan diferensial:

$$P_0x^n\,\frac{d^ny}{dx^n}+P_1x^{n-1}\,\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}x\,\frac{dy}{dy}+P_ny=Q(x)$$

atau dapat ditulis dalam polinomial operator D.

$$(P_0x^nD^n+P_1x^{n-1}D^{n-1}+\cdots+P_{n-1}xD+P_n)y=Q(x)$$

dengan $P_0\neq 0$, $P_1,\ldots,P_n$ adalah konstan.

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial ini, dilakukan transformasi $x=e^z$ untuk mereduksi persamaan diferensial semula menjadi persamaan diferensial linier orde n dengan koefisien konstan, yaitu:

transformasi $x=e^z$ atau $\ln x=z$

kemudian jika D didefinisikan oleh $D=\frac{d}{dz}$ maka:

$xDy=Dy$
$x^2D^2y=D(D-1)y$
$x^3D^3y=D(D-1)(D-2)y$
.

.
.
$x^n D^n y = D(D-1)(D-2)(D-3)\dots(D-n+1)y$
dan persamaan diferensial tereduksi menjadi:

$$[P_0 D(D-1)(D-2)(D-3)\dots(D-n+1) + P_1 D(D-1)(D-2)\dots(D-n+2) + \dots + P_{n-1}D + P_n]y = Q(e^z)$$

Berdasarkan jenis akar-akar dari persamaan karakteristik ada tiga kasus yang perlu diperhatikan didalam menentukan solusi umum (Kartono, 1994):

Kasus I: semua akar riil dan berbedaa, yaitu:
$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \dots . \neq \lambda_{n-1} \neq \lambda_n$
solusi umum persamaan diferensial adalah:
$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 2x} + c_3 e^{\lambda_3 3x} + \dots + c_n e^{\lambda_n nx}$
memuat n solusi bebas linier dengan n konstanta sebarang.

Kasus II: jika $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \dots . \neq \lambda_{n-1} \neq \lambda_n$
Solusi umum persamaaan diferensial adalah:
$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + c_3 e^{\lambda_3 x} + \dots + c_n e^{\lambda_n x}$
Secara umum, jika λ terjafi sebanyak r kali, maka solusi umum persamaan diferensial ini adalah
$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots + c_n x^{r-1})\, e^{\lambda x} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} x} + \dots + c_{n-1} e^{\lambda_{n-1} x} + c_n e^{\lambda x}$

Kasus III: Beberapa akarnya merupakan akar kompleks, Jika P_0, $P_1, P_2, \dots, P_n$ adalah riil dan jika $a + bi$ adalah akar kompleks dan demikian juga dengan $a - bi$ (dengan a dan b adalah riil) maka solusi umum yang berkaitan dengan akar kompleks ini adalah:

$$y = e^{ax}[c_1 \cos bx + c_2 \sin bx]$$

METODE PENELITIAN

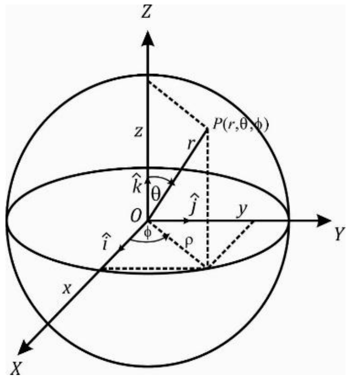
Penelitian ini merupakan kajian teori mengenai sistem persamaan diferensial parsial yang bertujuan untuk menentukan solusi persamaan Laplace pada koordinat bola. Dilakukan pada tahun 2018 dengan menggunkan buku-buku dan jurnal-jurnal yang membahas tentang persamaan diferensial, persamaan diferensial parsial.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini akan dibahas langkah-langkah penyelesaiakan persamaan diferensial parsial (solusi persamaan Laplace dimensi tiga pada koordinat bola) dengan menggunakan metode pemisahan variabel.

Prosedur matematis persamaan Laplace pada koordinat bola

Untuk menyatakan posisi sebuah benda di dalam ruang, dibutuhkan suatu sistem koordinat yang memiliki pusat koordinat dan sumbu koordinat. Sistem koordinat yang paling umum adalah koordinat kartesius. Koordinat kartesius dimensi tiga memiliki pusat di P dan dua sumbu koordinat yang saling tegak lurus, yaitu x dan y.
Hubungan antara koordinat kartesius dengan koordinat bola $u(r, \theta, \phi)$:



Gambar 4.1: koordinat Bola

maka diperoleh persamaan (9) berikut:

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \qquad (9) \\
z &= r\cos\theta
\end{aligned}
$$

dengan $r \geq 0,\quad 0 \leq \theta < \pi,\quad 0 \leq \phi < 2\pi$

pada persaman (3) persamaan laplace pada koordinat bola diperoleh:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Menentukan turunan parsial x, y, dan z terhadap r, θ dan ϕ dan menentukan Turunan parsial x, y dan z dari persamaan (9) terhadap r, θ dan ϕ dengan menggunakan persamaan (3) diperoleh persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta\cos\phi + \frac{\partial u}{\partial y}\ (\sin\theta\sin\phi) + \frac{\partial u}{\partial z}\ (\cos\theta) \qquad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\ (r\cos\theta\cos\phi) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta\sin\phi) + \frac{\partial u}{\partial z}\ (-r\sin\theta) \qquad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta\sin\phi) + \frac{\partial u}{\partial y}\ (r\sin\theta\cos\phi) \qquad (12)$$

Asumsikan bahwa $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial r}, \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial r}\ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r}$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z}$ pada persamaan (10), (11), dan (12) adalah fungsi kontinu. Maka diperoleh persamaan $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ dan $\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}$, yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (\sin^2\theta\cos^2\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\sin^2\theta\sin^2\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cos^2\theta \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(r^2\cos^2\theta\cos^2\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(r^2\cos^2\theta\sin^2\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(r^2\sin^2\theta) \qquad (14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + r\sin^2\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ (r^2\sin^2\theta\sin^2\phi) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\ (r^2\sin^2\theta\cos^2\phi) \qquad (15)$$

Dengan menggunakan aturan persamaan matriks pada persamaan (13), (14) dan (15) diperoleh persamaan Laplace pada koordinat bola berikut:

$$\nabla^2 u = \frac{\cos^2\theta}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin^2\theta}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\cos^2\theta}{r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} - \frac{\sin^2\theta}{r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$$

atau

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} \qquad (16)$$

Menentukan Solusi persamaan laplace pada koordinat bola

Bentuk umum persmaan laplace:

$$\nabla^2 u = 0$$

Pada persamaan (16) diperoleh persamaan diferensial parsial pada persamaan laplace dimensi tiga (koordinat bola) yang dapat disederhankan sebagai berikut:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} = 0 \qquad (17)$$

Metode Pemisahan Variabel

Misalkan $u(r,\theta,\phi)$ adalah solusi dari persamaan (17) yang diasumsikan dalam bentuk variabel terpisah berikut:

$$u(r,\theta,\phi) = R(r)P(\theta)Q(\phi) \qquad (18)$$

dengan menfaktorisasi persamaan (17) disubtitusikan ke persamaan laplace pada koordinat bola (17), akan diperoleh persamaan diferensial biasa berikut:

$$\frac{PQ}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{RQ}{r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{RP}{r^2\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = 0 \qquad (19)$$

Berdasarkan metode pemisahan variabel diperoleh:

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) = -\lambda^2 \qquad (20)$$

$$\frac{1}{P\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right) + \frac{1}{Q\sin^2\theta}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = \lambda^2 \qquad (21)$$

(dengan λ adalah konstantaa bernilai riil)

Berdasarkan metode pemisahan variabel maka di peroleh diperoleh solusi umum dari persamaan Laplace $\nabla^2 u = 0$ pada koordinat bola adalah:

$$R = A_1 r^\gamma + \frac{B_1}{r^{\gamma+1}}$$
$$P = A_2 S_n^m(\cos\theta) + B_2 T_n^m(\cos\theta)$$
$$\mathrm{Q} = A_3\cos m\phi + B_3\sin m\phi$$

persamaan Laplace $\nabla^2 u = 0$ pada koordinat bola diberikan oleh:

$u(r,\theta,\phi) = R(r)P(\theta)Q(\phi)$

$u = \left[A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\right][A_2 S_n^m(\cos\theta) + B_2 T_n^m(\cos\theta)][A_3 \cos m\phi + B_3 \sin m\phi]$

Fungsi $u(r,\theta,\phi)$ adalah fungsi periodik dengasn periode 2π pada ϕ, maka m haruslah bilangan bulat, yang dalam hal ini diambil positif. Untuk suatu kejadian $m = 0$ solusi $u(r,\theta,\phi)$ tidak bergantung pada ϕ sehinnga solusi umum dari persamaan Laplace $\nabla^2 u = 0$ pada koordinat bola adalah

$$u = \left[A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\right][A_2 S_n^m(\cos\theta) + B_2 T_n^m(\cos\theta)]$$

PEMBAHASAN

Hartanto mengkaji (2008), persamaan Laplace yang digunakan yaitu persamaan Laplace dalam pelat persegi panjang dan pelat cakram untuk memperoleh solusi umum dan menyelesaikan sistem persamaan linear yang diperoleh dari metode pemisahan variabel diselesaikan dengan metode iterasi Gauss-Seidel, sedangakan pada penelitian ini menenentukan solusi dari $R(r)$ persamaan diferensial linear yang didapatkan diselesaikan dengan persamaan linear Cauchy, solusi dari $P(\phi)$ persamaan diferensial linear yang diperoleh diselesaikan dengan persamaan diferensial linear Legendre dan solusi dari $Q(\phi)$ persamaan diferensial biasa yang diselesaikan dengan solusi umum. Hasil penelitian keduanya menunjukkan hal yang berbeda karena ada yang menghasilakan solusi numeriknya da nada pula yang hasil analitiknya.

Faradillah (2011), persamaan yang digunakan dalam penelitian ini adalah persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian. sedangakan pada penelitian “Solusi Persamaan Laplace pada Koordinat Bola” ini, persamaan yang digunakan adalah persamaan Laplace pada koordinat bola. Peneyelesaian umum keduanya berbeda karena pada persamaan Helmholtz pada koordinat kartesian penyelesaian umumnya adalah $\left[a_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right]\left[2b_n i \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2^n}\right]\left[2c_n i \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2^n}\right] = \frac{1}{2}$. sedangkan persamaan Laplace pada koordinat bola penyelesaian umumnya adalah $\left[A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\right][A_2 S_n^m(\cos\theta) + B_2 T_n^m(\cos\theta)][A_3 \cos m\phi + B_3 \sin m\phi]$.

Aziz dan Chandra (2015), pada penelitian ini sistem koordinat yang digunakan adalah koordinat polar. Sedangkan pada penelitian ini, sistem koordinat yang digunakan adalah sistem koordinat bola. Dengan demikian, hasil dari penelitian ini adalah memperoleh solusi umum persamaan Laplace dimensi tiga pada koordinat bola dengan menggunakan metode pemisahan variabel merupakan suatu solusi analitik. Sehingga berbeda dengan hasil yang diperoleh dari Hartanto yaitu memperoleh suatu solusi numeriknya dengan menggunakan metode yang sama. Berbeda juga dari penelitian Faradilla S, yaitu solusi yang didapatkan pada koordinat kartesian adalah $u(x,y,z) = \left[a_n \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\right]\left[2b_n i \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2^n}\right]\left[2c_n i \cos\frac{(2n+1)\pi z}{2^n}\right] = \frac{1}{2}$ dan pada koordinat bola adalah $u(r,\theta,\phi) = \left[A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\right][A_2 S_n^m(\cos\theta) + B_2 T_n^m(\cos\theta)][A_3 \cos m\phi + B_3 \sin m\phi]$. Berbeda juga dengan Aziz dan Chandra yaitu hasil yang diperoleh yaitu dalam domain ruang Euclid tiga dimensi pada koordinat silinder adalah $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} I_0\left(\frac{n\pi}{h}\rho\right)\sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)$.

KESIMPULAN

Kesimpulan dari hasil penelitian :

1. Berdasarkan pemaparan pada pembahasan didapatkan persamaan Laplace dimensi tiga pada koordinat bola. Dimana operasi Laplacian dari fungsi skalar u yaitu:
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$
Selanajutnya, dengan menggunakan metode pemisahan variabel persamaan Laplace dimensi tiga pada koordinat bola adalah
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

2. Persamaan Laplace pada koordinat bola
Dengan menggunakan metode pemisahan variabel dapat diselesaikan persamaan Laplace dalam bentuk variabel terpisah
$$u(r,\theta,\phi) = R(r)P(\theta)Q(\phi)$$
dengan
$R(r) = A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}$
$P(\theta) = A_2 S_n^m(\cos\theta) + B_2 T_n^m(\cos\theta)$
$Q(\phi) = A_3 \cos m\phi + B_3 \sin m\phi$

Diperoleh solusi umum dari persamaan Laplace $\nabla^2 u = 0$ pada koordinat bola, yaitu
$$u(r,\theta,\phi) = \left[A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\right][A_2 S_n^m(\cos\theta) + B_2 T_n^m(\cos\theta)][A_3 \cos m\phi + B_3 \sin m\phi]$$
atau
$$u\,(r,\theta) = \left[A_1 r^n + \frac{B_1}{r^{n+1}}\right][A_2 S_n^m(\cos\theta) + B_2 T_n^m(\cos\theta)]$$

Saran

Konstruksi persamaan Laplace tidak hanya dapat dihasilkan dengan menggunakan metode pemisahan variabel tetapi juga dapat dikonstruksikan dengan menggunakan Analisis vektor. Penelitian berikutnya dapat dikembangkan lagi dengan menggunakan syarat batas untuk memperoleh solusi khusus persamaan Laplace pada koordinat bola.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta. Erlangga.

Arifin, M. W & sugiyanto.2013. *Aplikasi Transformasi Laplace pada Rangkaian Listrik.* Jurnal Matematika Murni dan terapan Vol. 2, No.1,5470.

Asmar, & Nakhle. H. 2005. *Differential Equation With Fourier Series and Boundary Value Problems (second Edition).* Pearson Prentice Hall: Amerika Serikat.

Aziz, T & Chandra T. D. 2015. *Fungsi Harmonik dan Penerapan Persamaan Laplace dalam Menyelesaikan Masalah Nilai Batas pada Koordinat Polar.*

Boas, L. M. 2006. *Mathematical Methods in The Physical Sciences.* New York: John Wiley & Sons, Inc (Kaye Pace).

Hartanto, S. A. 2008. *Penyelesaian Numerik Persamaan Laplace dan Persamaan Poisson dalam Pelat Persegi Panjang dan Pelat Cakram Dengan Metode Beda-Hingga*. Yokyakarta: Universitas Sanata Dharma.

Kusumah. 1989. *Persamaan diferensial.* Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Meyriska, A. H. 2005. *Transformasi Laplace dari Masalah Nilai Batas pada Persamaan Diferensial Parsial*. Skripsi. Universitas Negeri Semarang.

Nagle, R. Kent, Saff, Edward B & Snider, Arthur David (2004). *Fundamentals of Differential Equation* (6^{th} ed). Pearson Education, Inc.

Purcell, dkk. 2008. *Calculus*. New York: John Wiley & sons.

Purnomo, D. 2016. *Trigonometri (Ilmu Ukur Sudut).* Jakarta: Gunung Samudera (Grup Penerbit PT Book Mart Indonesia).

Ruminta, 2014. *Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. Bandung: Rekayasa Sains

Sasongko, S. B. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab.* Yogyakarta: Binafsi Publisher.

Side, Safruddin. 2014. *Persamaan Diferensial Parsial*. Makassar: Diktat.

Sumardi. 2012. *Kalkulus Lanjut.* Artikel UMB.

Sugiyarto. 2015. *Persamaan Diferensial.* Yogyakarta: Binafsi Publisher.

Spiegel, R. M. 1986. *Analisis Fourier*. Jakarta: Erlangga.